ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre, ER **03. 02. 20**

2horas

Nome:____Turma:________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2a.(15)	3a.(15)	5.(10)
1b.(20)	2b.(15)	3b.(15)	6a.(10)
1c.(15)	2c.(15)	4a.(15)	6b.(5)
	2d.(15)	4b.(15)	7.(15)

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade conjunta $f(x,y)$ dada por

$x \backslash y$	1	2	3
0	1/15	2/15	3/15
1	2/15	3/15	4/15

   a. Calcule $E(Y)$ e $E(Y \mid X=0)$. Será que o resultado obtido lhe permite concluir sobre a possível independência entre as variáveis? Justifique cuidadosamente a sua resposta.
   b. Calcule $P(X=0, Y<2)$, $P(X=0 \mid Y<2)$ e $E(XY)$
   c. Obtenha a função probabilidade de $Z = X + Y$ e calcule $P(Z=3 \mid X=1)$.

2. Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por $f_X(x) = 2x$, $0 < x < 1$.

   a. Obtenha a função de distribuição de X e obtenha também o valor esperado de X.
   b. Obtenha a função de densidade de $V = -4 \ln X$ e identifique a distribuição.
   c. Seja Y uma outra variável aleatória cuja função densidade marginal, condicionada por $X = x$, é uma uniforme entre 0 e x, isto é, $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{x}$, $0 < y < x$. Obtenha a função de densidade conjunta do par (X,Y) e obtenha também a função densidade marginal de Y.
   d. Calcule $P\left(X > 0.25 \mid X < 0.5\right)$ e $P(Y > X^2)$.

3. Os doentes chegam ao serviço de urgência de determinado hospital, entre as 8 e as 20h, de acordo com um processo de Poisson com taxa de 20 por hora.
   a. Qual a probabilidade de chegarem pelo menos 5 doentes entre as 9 e as 9h15? Recalcule esta probabilidade sabendo que entre as 9 e as 9h03 chegaram 2 doentes.
   b. Calcule a probabilidade do tempo necessário para se verificarem 10 chegadas consecutivas ser superior a 60 minutos.

4. Admita que o peso real das maçãs contidas num saco pré-embalado de 2kg segue uma distribuição normal de média 2020 g e variância 640.

    a. Qual a probabilidade de se um saco conter menos do que o peso de referência (2kg)? Sabendo que $\Phi^{-1}(0.75) = 0.6745$, obtenha o terceiro quartil da distribuição do peso de um saco.
    b. Comprados 10 sacos nas condições anteriores qual a probabilidade de que exatamente 9 deles tenham mais do que o peso de referência?

5. Recolheu-se uma amostra casual de dimensão 16 de uma população normal. Qual a probabilidade de a média da amostra diferir da média da população por um valor superior a 0.438 vezes o desvio-padrão corrigido da amostra?

6. Considere 5 caixas idênticas numeradas de 1 a 5. A caixa i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ contem i bolas brancas e $(5 - i)$ bolas pretas. Uma caixa é selecionada aleatoriamente e dessa caixa são retiradas sem reposição 2 bolas.
    a. Qual a probabilidade de que ambas as bolas sejam brancas?
    b. Sabendo que as duas bolas são brancas qual a probabilidade de terem sido retiradas da caixa 3?

7. Sejam A e B dois acontecimentos do espaço de resultados Ω. Sabendo que $P(A) = 3/4$ e $P(B) = 1/3$, mostre que $1/9 \leq P(B \mid A) \leq 4/9$. Justifique cuidadosamente o seu raciocínio.

Soluções

1.

a. $E(Y)=1\times\frac{3}{15}+2\times\frac{5}{15}+3\times\frac{7}{15}=\frac{34}{15}$ e $E(Y\mid X=0)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}=\frac{14}{6}$.

Uma vez que $E(Y)\neq E(Y\mid X=0)$ podemos concluir que não existe independência entre as variáveis (a inversa não seria verdadeira).

b. $P(X=0,Y<2)=f(0,1)=1/15$

$P(X=0|Y<2)=\frac{f(0,1)}{f_Y(1)}=\frac{1/15}{3/15}=\frac{1}{3}$

$E(XY)=1\times 1\times\frac{2}{15}+1\times 2\times\frac{3}{15}+1\times 3\times\frac{4}{15}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$

c. A função probabilidade de $Z=X+Y$ será dada por

z	1	2	3	4
$f_Z(z)$	1/15	4/15	6/15	4/15

$$P(Z=3\mid X=1)=P(X+Y=3\mid X=1)=\frac{P(X+Y=3\wedge X=1)}{P(X=1)}=\frac{P(Y=2,X=1)}{P(X=1)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

2. $f_X(x)=2x$, $0<x<1$.

a. $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leq x<1.\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$

$E(X)=\int_0^1 x\,f_X(x)dx=\int_0^1 2x^2\,dx=\left(\frac{2x^3}{3}\right)_0^1=\frac{2}{3}$

b.

$$F_V(v)=P(V\leq v)=P\left(-4\ln X\leq v\right)=P\left(\ln X\geq\frac{-v}{4}\right)=P\left(X\geq e^{-v/4}\right)$$

$$=\int_{e^{-v/4}}^{1}2x\,dx=\left(x^2\right]_{e^{-v/4}}^{1}=1-e^{-v/2}\qquad v>0$$

$f_V(v)=\frac{d}{dx}\left(1-e^{-v/2}\right)=\frac{1}{2}\,e^{-v/2}\qquad v>0$

Tratando-se da distribuição exponencial de parâmetro ½.

c. $f(x,y)=f_{Y|X}(y\mid x)\,f_X(x)=\frac{1}{x}\times 2x=2\quad 0<x<1\,,\ 0<y<x$.

$f_Y(y)=\int_y^1 2\,dx=\left(2x\right]_y^1=2(1-y)\qquad 0<y<1$

d. $P\left(X>0.25\mid X<0.5\right)=\frac{P\left(0.25<X<0.5\right)}{P\left(X<0.5\right)}=\frac{\int_{0.25}^{0.5}2x\,dx}{\int_0^{0.5}2x\,dx}=\frac{\left(x^2\right]_{0.25}^{0.5}}{\left(x^2\right]_0^{0.5}}=\frac{0.5^2-0.25^2}{0.5^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$P\left(Y>X^2\right)=\int_0^1\int_{x^2}^{x}2\,dy\,dx=\int_0^1\left(2y\right]_{x^2}^{x}dx=2\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

3. .

a.

X_1 – Nº de chegadas entre as 9 e as 9h15 (15 minutos) $\quad X_1\sim Po(\frac{20}{4})$

$P(X_1\geq 5)=1-P(X_1\leq 4)=1-0.4405=0.5595$

X_2 – Nº de chegadas entre as 9 e as 9h03

X_3 – Nº de chegadas entre as 9h03 e as 9h15 (12 minutos) $\quad X_1\sim Po(\frac{20}{5})$

$P(X_1 \geq 5|X_2 = 2) = P(X_3 \geq 3) = 1 - P(X_3 \leq 2) = 1 - 0.2381 = 0.7619$

b.
T – Tempo (em minutos) para 10 chegadas consecutivas
$T \sim G\left(10; \frac{1}{3}\right)$ logo $\frac{2\,T}{3} \sim \chi^2_{(20)}$
$P(T > 60) = P\left(\frac{2\,T}{3} > 40\right) = 0.005$ (tabela)

4.

a. X peso real das maçãs contidas num saco $X \sim n(2020; 640)$

$$P(X < 2000) = \Phi\left(\frac{2000-2020}{\sqrt{640}}\right) \approx \Phi(-0.79) = 1 - 0.7852 = 0.2148 \text{ (tabelas) ou } 0.2146 \text{ (maq)}$$

$q_3 : P(X < q_3) = 0.75$ logo

$$\Phi\left(\frac{q_3 - 2020}{\sqrt{640}}\right) = 0.75 \Leftrightarrow \frac{q_3 - 2020}{\sqrt{640}} = \Phi^{-1}(0.75) \Leftrightarrow q_3 = 2020 + 0.6745\sqrt{640} = 2037.064$$

b. N número de sacos em 10 com peso superior a 2kg. $N \sim b(10; p)$ com
$p = P(X > 2000) = 1 - 0.2148 = 0.7852$ (tabelas)

$$P(N=9) = \binom{10}{9} p^9 (1-p)^1 = 10 \times 0.7852^9 \times 0.2148 = 0.2437 \text{ (tabelas)}$$

5. .

$$P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > 0.438 S'\right) = P\left(\frac{\left|\bar{X} - \mu\right|}{S'/\sqrt{n}} > 0.438 \times 4\right) = P\left(|T| > 1.752\right) = 2 \times 0.05 = 0.10$$

Já que $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$ e que a distribuição t-Student é simétrica em torno do valor 0.

6. a. Sejam os acontecimentos

B – As 2 bolas são brancas
C_i – As bolas foram extraídas da caixa i (i bolas brancas e $5 - i$ bolas pretas)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(B|C_i) \times P(C_i)$$

Com $P(C_i) = 1/5$ e $P(B|C_i) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \frac{\binom{i}{2} \times \binom{5-i}{2}}{\binom{5}{2}} & i = 2, \dots, 5 \end{cases} = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \frac{i}{5} \times \frac{(i-1)}{4} & i = 2, \dots, 5 \end{cases}$

Logo

$$P(B) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{2}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{6}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{12}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{20}{20} \times \frac{1}{5} = \frac{40}{100} = 0.4$$

b. $P(C_3|B) = \frac{P(B|C_3) \times P(C_3)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{20} \times \frac{1}{5}}{0.4} = \frac{0.06}{0.4} = \frac{6}{40} = 0.15$

7. .

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ora $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cup B) = \frac{13}{12} - P(A \cup B)$

Por outro lado, sabe-se que

$P(A \cup B) \geq max\big(P(A), P(B)\big) = max\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}$

e que

$$P(A \cup B) \leq min(P(A) + P(B), 1) = min\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}, 1\right) = min\left(\frac{13}{12}, 1\right) = 1$$

Donde

$\frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1$ e portanto $\frac{13}{12} - 1 \leq P(A \cap B) \leq \frac{13}{12} - \frac{3}{4}$, isto é, $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{4}{12}$

E portanto $\frac{1/12}{3/4} \leq P(A|B) \leq \frac{4/12}{3/4}$ ou seja $\frac{1}{9} \leq P(A|B) \leq \frac{4}{9}$